TEST : 7 questions de CAPES posées
en contrôle continu en 2017 avec les réponses d'une étudiante

UNIVERSITE DES ANTILLES
ESPE DE L'ACADEMIE DE GUADELOUPE
ANNEE 2017-18

MASTER MEEF PARCOURS PLC Mathématiques

CONTROLE CONTINU EC122, 132 & 143
n°2 du vendredi 10 novembre 2017

Durée : 3 h

Les documents (livres, notes de cours, etc.) physiques ou numériques ne sont pas autorisés. Les calculatrices ne sont pas autorisées. Les instruments de dessin sont autorisés. Le barème de correction tiendra compte de la qualité de la rédaction et de la lisibilité de la copie.

Attention : les différentes parties de cette composition donneront lieu à trois notes séparées pour les trois EC concernés.

EC122 Géométrie

Question 1 *Ecrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz vérifiée par toute forme bilinéaire symétrique positive sur un espace vectoriel E. Démontrez-la.*

Question 2 *Le plan étant rapporté à un repère orthonormal, montrer que la distance d'un point $M(x_0, y_0)$ à la droite D d'équation $ax + by + c = 0$ est :*

$$\mathrm{d}(M, D) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Question 3 *Dans un plan affine euclidien, on considère deux droites D et D' sécantes en un point O. Démontrer qu'il existe exactement deux réflexions s_Δ qui échangent ces deux droites, autrement dit qui vérifient $s_\Delta(D) = D'$ et $s_\Delta(D') = D$. Expliciter comment tracer les axes Δ_1 et Δ_2 de ces réflexions, puis démontrer qu'ils sont perpendiculaires.*

EC132 Algèbre & arithmétique

Question 4 *Soit ϕ une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que pour tous nombres réels x et y :*

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y), \ \phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \ \text{ et } \ \phi(1) = 1.$$

a) Montrer que $\phi(0) = 0$ et que $\phi(x-y) = \phi(x) - \phi(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer enfin que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \quad \phi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\phi(x)}{\phi(y)}.$$

b) Montrer que $\phi(n) = n$ pour tout entier naturel n.

c) Montrer que $\phi(r) = r$ pour tout nombre rationnel r.

d) Soient a et b deux nombres réels tels que $a \leq b$. Démontrer l'inégalité $\phi(a) \leq \phi(b)$. On pourra utiliser l'égalité $b - a = (\sqrt{b-a})^2$.

e) Soient x un nombre réel et ε un nombre réel strictement positif. Montrer qu'il existe deux nombres rationnels x' et x'' tels que :

$$x - \varepsilon \leq x' \leq x \leq x'' \leq x + \varepsilon.$$

En déduire que $x - \varepsilon \leq \phi(x) \leq x + \varepsilon$, puis que $\phi = Id_{\mathbb{R}}$.

EC143 Préparation à l'écrit

Question 5

a) Montrer que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.

b) Soit ABC un triangle non aplati. Montrer qu'il existe un et un seul cercle qui passe par les sommets de ce triangle.

Question 6 *On considère trois entiers relatifs a, b et c. Montrer que :*

a) Si a est premier avec b et si a est premier avec c, alors a est premier avec bc.

b) Si a divise bc et si a est premier avec b, alors a divise c.

Question 7 *Soit ABC un triangle non aplati. On admet que la bissectrice intérieure issue de A du triangle ABC coupe la droite (BC) en un point I_A. Démontrer que :*

$$\frac{\overline{I_AB}}{\overline{I_AC}} = -\frac{AB}{AC}.$$

FIN DE L'EPREUVE

Exemple de très bonne copie / Anonymée
PRD = Présentation Rédaction Disposition / Temps limité : 3h
Exercice choisis parmi ceux trav aillés depuis début septembr

NB sur la correction : les 2 rajouts tapés à la machine montrent des erreurs que je n'avais pas notées, repérées par un Mégamathien sur Facebook.

Vendredi 10 Novembre 2017

Contrôle continu des EC 122, 132 et 143 n° 2

M1 MEEF Maths

EC 122 :	EC 132 :	EC 143 :
12/20 Ce qui a été traité l'a été parfaitement.	18/20 Excellent !	20/20 Excellent ! Bravo !

EC 132 : Algèbre & arithmétique

Nombre de copies 1/3

Question 4 :

a) Je montre que $\phi(0) = 0$:

$$\phi(0+0) = \phi(0) + \phi(0)$$
$$\phi(0) = \phi(0) + \phi(0)$$
$$\phi(0) - \phi(0) = \phi(0)$$
$$0 = \phi(0)$$

2/2 malachai ⇒ ⇒ × ⇒ j

Je montre que $\phi(x-y) = \phi(x) - \phi(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:
Si $y \in \mathbb{R}$, alors ~~on a~~ :

$$\phi(y) + \phi(-y) = \phi(y-y) = \phi(0) = 0$$

2/2 donc $\phi(-y) = -\phi(y)$ TB
Ainsi, si $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\phi(x+(-y)) = \phi(x) + \phi(-y)$$
$$\phi(x+(-y)) = \phi(x) - \phi(y)$$

Je montre alors que :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \quad \phi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\phi(x)}{\phi(y)}$.

Par définition, $x = \frac{x}{y} \times y$, donc

$$\phi(x) = \phi\left(\frac{x}{y} \times y\right)$$
$$= \phi\left(\frac{x}{y}\right) \times \phi(y) \quad (*)$$

y étant inversible car non nul, on a alors
$y \times \frac{1}{y} = 1$.

En appliquant ϕ, on obtient :

$$\phi\left(y \times \frac{1}{y}\right) = \phi(1)$$

TB

$$\phi(y) \times \phi\left(\frac{1}{y}\right) = 1$$

2/2

Donc $\phi(y) \neq 0$.
$(*)$ s'écrit alors :

$$\phi\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{\phi(x)}{\phi(y)}$$

b) Montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\phi(n) = n$ par récurrence

Posons $P(n) : \phi(n) = n$

Initialisation :
$n = 0$, $\phi(0) = 0$ est évident
$n = 1$, $\phi(1) = 1$ par hypothèse

Hérédité :

Je suppose que $P(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned}\phi(n+1) &= \phi(n) + \phi(1) \\ &= \phi(n) + 1 \\ &= n+1\end{aligned}$$

2/2

Conclusion :

$P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

$\boxed{c)}$ Montrons que $\phi(r) = r$, pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

Soit $r \in \mathbb{Q}$,

$\exists (p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tel que

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \phi\left(\frac{p}{q}\right) \\ &= \frac{\phi(p)}{\phi(q)} \\ &= \frac{\phi(p)}{q} \quad (+)\end{aligned}$$

• Si $p \geq 0$, on sait que $\phi(p) = p$, donc $\phi(r) = \frac{p}{q} = r$.

Excellent !

• Sinon $p < 0$ et l'on écrit $p = -p'$ avec $p' \in \mathbb{N}$. Les hypothèses sur ϕ donnent :

$\phi(0 - p') = \phi(0) - \phi(p') = -\phi(p')$

donc $\phi(p) = -\phi(-p) = -(-p) = p$.

2/2

$(+)$ donne encore :

$\phi(r) = \frac{p}{q} = r$

Conclusion :

$\forall r \in \mathbb{Q}, \ \phi(r) = r.$

$\boxed{d)}$ Je démontre l'inégalité $\phi(a) \leq \phi(b)$.

Si $a \leq b$, alors :

$$\begin{aligned}\phi(b) - \phi(a) &= \phi(b-a) \\ &= \phi\left(\sqrt{b-a}^{\,2}\right) \\ &= \left(\phi\left(\sqrt{b-a}\right)\right)^2 \geq 0,\end{aligned}$$

Excellent puisqu'un carré est toujours positif.

Ainsi, $\phi(b) \geq \phi(a)$.

3/3

Attention : "le carré d'un nombre réel est toujours positif". Si on est dans C se serait chaud...

$\boxed{e)}$ Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, il existe

$$\begin{cases} x' \in \left]x-\varepsilon, x\right[\\ x'' \in \left]x, x+\varepsilon\right[\end{cases}$$

X!

Gubli essentiel : vous ne dites pas que x' et x'' sont des rationnels ! Trop vaud...

0/2

Donc :

$$x - \varepsilon \leq x' \leq x \leq x'' \leq x + \varepsilon.$$

J'en déduis que, comme ϕ est croissante d'après d), et comme ϕ laisse invariant tous les éléments de $\mathbb{Q}$ (c)) alors :

TB

$$\phi(x') = x' \leq \phi(x) \leq x'' = \phi(x'')$$

donc :

$$x - \varepsilon \leq x' \leq \phi(x) \leq x'' \leq x + \varepsilon.$$

3/3

Finalement, si $x \in \mathbb{R}$,

$\forall \varepsilon > 0, \quad x - \varepsilon \leq \phi(x) \leq x + \varepsilon$

c'est-à-dire

$\forall \varepsilon > 0 \quad |\phi(x) - x| \leq \varepsilon,$

cela entraîne que $\phi(x) = x$, j

M1 MEEF Maths

Nombre de copies 2/3

Suite de la Question 4, e)

d'après le lemme suivant :

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est tel que
$\forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq \alpha < \varepsilon$
alors $\alpha = 0$.

Je peux le prouver de la manière suivante :

(Bravo)

Par l'absurde,
si $\alpha > 0$, il suffit de choisir $\varepsilon = \frac{\alpha}{2}$
pour avoir :
$0 \leq \alpha < \frac{\alpha}{2}$ ce qui est absurde.

J'ai donc déduis que $\underline{\phi = Id_{\mathbb{R}}}$.

2/2

EC 122 : Géométrie

Question 1

L'inégalité de Cauchy-Schwarz vérifiée pour toute forme bilinéaire symétrique positive sur E ~~est telle que~~ s'énonce ainsi :

(A améliorer) (j)

Soit E = espace vectoriel sur $\mathbb{R}$

$$f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\forall x, y \in E \qquad f(x,y)^2 \leq f(x,x) \cdot f(y,y).$$

Je la démontre :

$\forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad f(x+\lambda y, x+\lambda y) \geq 0.$

Donc $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$f(y,y)\lambda^2 + 2\lambda f(x,y) + f(x,x) \geq 0 \qquad (*)$$

. Si $f(y,y) = 0$, on obtient :

$\forall \lambda \in \mathbb{R} \qquad 2\lambda f(x,y) + f(x,x) \geq 0$

ce qui entraîne, $f(x,y) = 0$, et alors Cauchy-Schwarz est évidente.

× Pourquoi ? Expliquer un peu...

6/6

. Si $f(y,y) \neq 0$, alors le premier membre de $(*)$ est un trinôme du second degré, et $(*)$ montre que ce trinôme est de discriminant $\Delta' \leq 0$, ~~soit :~~

$$f(x,y)^2 - f(x,x) \cdot f(y,y) \leq 0$$

$$f(x,y)^2 \leq f(x,x) \cdot f(y,y)$$

Question 2

$d(M,D)$ est la distance de M à D.
On sait que $d(M,D) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur D. Soit $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.
Soit $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ un point de D. Soit p la projection vectorielle orthogonale sur $\vec{D}^{\perp}$.
On sait que $p(\overrightarrow{MA}) = \overrightarrow{MH}$. D'après la définition d'une projection, on a :

Ce n'est pas une définition, plutôt une propriété

$$p(\overrightarrow{MA}) = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \vec{n}$$

Excellent

Donc $MH = \|p(\overrightarrow{MA})\| = \dfrac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|^2} \cdot \|\vec{n}\|$

Clair et très bien rédigé ; bravo.

$$= \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}|}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (*)$$

6/6

On a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} x_A - x_0 \\ y_A - y_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = ax_A + by_A - ax_0 - by_0 - c$$

On remplace alors dans $(*)$, et on obtient

$$MH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = d(M,D).$$

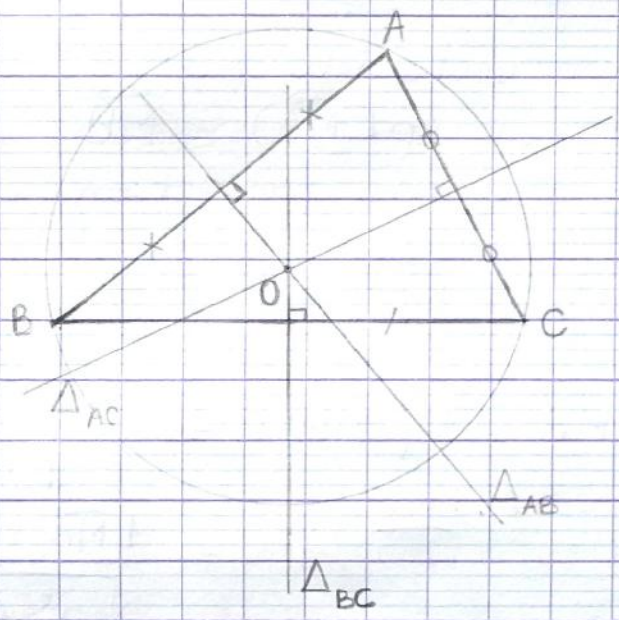
0/8

Question 3

EC 143 : Préparation à l'écrit

Question 5 :

a Je montre que les médiatrices d'un triangle sont concourantes.



De façon générale, je note Δ_{MN} la médiatrice de [MN].

Soit O l'intersection de Δ_{AB} et Δ_{BC}.
Le point O intersection de Δ_{AB} et Δ_{BC} existe forcément. Sinon Δ_{AB} serait parallèle à Δ_{BC} et les droites (AB) et (BC) passeraient toutes les deux par B en étant perpendiculaires à la même direction que Δ_{AB}, donc ~~sont~~ seraient égales. Mais alors le triangle ABC est aplati, ce qui est absurde.

TB

3,5/3,5

oui

Rédaction

Donc l'intersection existe. "On a, par définition d'une médiatrice :

$$\begin{cases} OA = OB \\ OB = OC \end{cases}$$

donc $OA = OC$ ce qui prouve que $O \in \Delta_{AC}$.

Suite de la Question 5, a)

Finalement,

$$\Delta_{AB} \cap \Delta_{AC} \cap \Delta_{BC} = \{O\}$$

et les trois médiatrices concourent.

M1 MEEF Maths

b) Je montre qu'il existe un et un seul cercle qui passe par les sommets de ce triangle ABC non aplati.

(inutile. Gagney du temps en débutant immédiatement ici)

Raisonnons par Analyse - Synthèse.

Nombre de copies 3/3

3,5/3,5

Excellent! Cela fait plaisir de vous lire.

. Analyse - S'il existe un cercle $\mathcal{C}$ passant par A, B et C, son centre O vérifie OA = OB = OC, donc est l'intersection des trois médiatrices des côtés du triangle ABC (ce qui existe d'après a)), et son rayon ne peut être que OA. Donc $\mathcal{C}$ est égal au centre $\mathcal{C}(O, OA)$ de centre O et de rayon OA.

. Synthèse - On vérifie que $\mathcal{C}(O, OA)$ convient. Il passe évidemment par A, B et C puisque OA = OB = OC.

Question 7

~~(Soit C' le symétrique de C par rapport à la bissectrice extérieure D'_A issue de A du triangle ABC)~~

Soient D_A et D'_A les bissectrices intérieure et extérieure issues de A du triangle ABC.

On sait que D_A est perpendiculaire à D'_A.

Excellent

Par définition d'une bissectrice extérieure, la symétrie orthogonale s par rapport à D'_A transforme la demi-droite $[AC)$ en $-[AB)$.
$C \in [AC)$ donc $C' = s(C) \in -[AB)$.
Par construction, (CC') perpendiculaire à D'_A, et comme D_A perpendiculaire à D'_A, on a déduit que D_A parallèle à la droite (CC'). Le Théorème de Thales donne :

$$\frac{\overline{I_AB}}{\overline{I_AC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}} = \pm \frac{AB}{AC'}$$

où le signe $\pm$ est à préciser.
On sait qu'une réflexion conserve les distances donc $AC' = AC$ et

6/6

$$\frac{\overline{I_AB}}{\overline{I_AC}} = \pm \frac{AB}{AC}$$

On sait que $C' \in -[AB)$ donc $A \in [BC']$ ce qui impose à $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}}$ d'être négatif.

oui

Bravo

Par suite, $\frac{\overline{I_AB}}{\overline{I_AC}} = -\frac{AB}{AC}$

Question 6

a) $\left.\begin{array}{l} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{array}\right\} \overset{?}{\Rightarrow} a \wedge bc = 1$

Comme $a \wedge b = 1$, on a, d'après le Théorème de Bezout :

$\exists u, v \in \mathbb{Z} \qquad au + bv = 1 \qquad (1)$

De même :

$\exists u', v' \in \mathbb{Z} \qquad au' + cv' = 1 \qquad (2)$

En multipliant (1) et (2), on a :

$(au + bv)(au' + cv') = 1$

$aa'uu' + acuv' + bavu' + bcvv' = 1$

TB

$a(a'uu' + cuv' + bvu') + bcvv' = 1$

$a\underbrace{u''}_{\in \mathbb{Z}} + bc\underbrace{v''}_{\in \mathbb{Z}} = 1$

3,5/3,5

où $\begin{cases} u'' = auu' + cuv' + bvu' \in \mathbb{Z} \\ v'' = vv' \in \mathbb{Z} \end{cases}$

Donc d'après le Théorème de Bezout,

$\underline{a \wedge bc = 1}$.

b) Comme $\text{pgcd}(a, b) = 1$,

d'après le Théorème de Bezout :

$\exists u, v \in \mathbb{Z} \qquad au + bv = 1 \qquad (1)$

En multipliant par c les deux membres de l'égalité (1), on obtient :

$auc + bvc = c$.

Par conséquent,

| pas / ni \

X $\begin{cases} a / auc \\ a / buc \end{cases} \iff \begin{cases} a / auc \\ a / bc \end{cases} \Rightarrow \underline{a / c}$

3,5/ 3,5 ce qui permet de conclure que a divise c. —

X

(A placer au début de ligne en fait)